# Proporciones, progresiones y diseño

Franklin Hernánde- Castro

A través de la historia se han implementado diferentes tipos de proporción en el arte y el diseño en general, este es un resumen de las secuencias usadas en esos campos.

La expresión mínima de proporción es la división de la unidad, la que produce tres valores: las dos partes y el total.

En las palabras de Platón: " But two things cannot be satisfactorily united without a third: for there must be some between them tying together." [45, page 40].

Esta mínima expresión de la proporción es la base de todo sistema proporcional, matemáticamente es conocida como "La media".

Tomemos un minuto para analizar este fenómeno. Al cortar un segmento de línea en un punto específico se crean, por supuesto dos elementos, estos a su vez generan inevitablemente tres diferentes razones o proporciones entre ellos, véase figura A.11:

$$\text{la primera parte} : \text{la segunda parte, es decir,} \quad A : B \tag{A.3}$$

$$\text{la primera parte} : \text{la unidad, es decir,} \quad A : C \tag{A.4}$$

$$\text{la segunda parte} : \text{la unidad, es decir,} \quad B : C \tag{A.5}$$

La proporción entre estas dos partes determina el tipo de media que se utiliza.

Digamos que comenzamos con un corte de la unidad en la mitad. En este caso las dos dimensiones creadas ($A$ y $B$) son iguales entre sí (proporción 1:1) y cualquiera de ellas con respecto al todo tendrá una razón del doble (1:2).

Si cortamos ahora la línea en otro punto relativamente cercano a la

[5] Profesor Catedrático de la Escuela de Diseño Industrial, Instituto Tecnológico de Costa Rica, correo-e: franhernandez@itcr.ac.cr

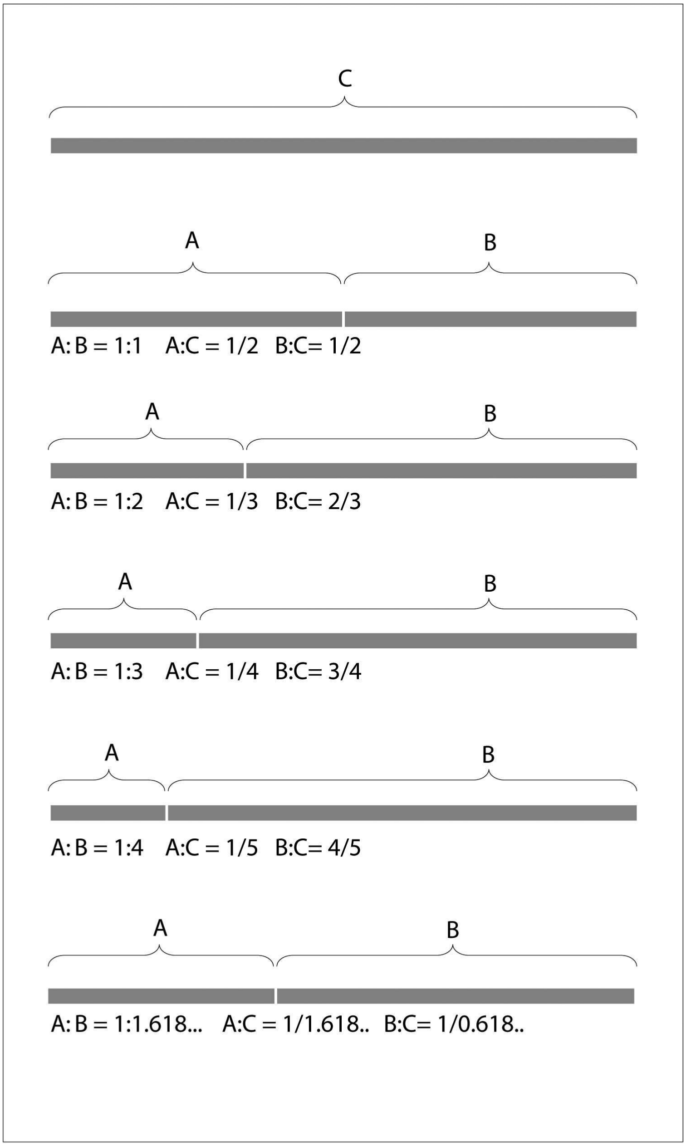


Figura A.11: Diferentes cortes de la unidad.

mitad (pero no exactamente en la mitad), la proporción entre las dos partes creadas deja de ser 1 y se convierte en una razón cercana a uno, digamos $1:0.8$. Por su parte las dos nuevas dimensiones generan a su vez dos proporciones distintas con respecto al todo, una de ellas se acerca más a la unidad (la que crece) y la otra se aleja de ella (la que decrece).

Así se genera una secuencia de dimensiones a partir de un solo corte en la unidad, en esta secuencia tenemos una parte pequeña ($A$), una intermedia ($B$) y una parte mayor ($C$, el todo), véase figura A.11.

Como hemos dicho, si vamos probando diferentes cortes de la unidad a partir de la mitad de ésta hacia el extremo, vamos obteniendo diferentes proporciones entre las partes. La parte pequeña se va alejando de la dimensión de la parte mediana, mientras tanto la parte mediana se va acercando a la dimensión del todo. Este factor de crecimiento y decrecimiento de las dimensiones es la característica individual de cada corte o proporción.

Para seleccionar cuál estos cortes usar (y con ellos las proporciones que estos definen), se han generado a través de la historia varios métodos. Estos métodos se basan en el procedimiento de cortar la unidad básica, como hemos visto, y por lo tanto en el tipo de proporciones que este corte conlleve.

Existen varios tipos de cortes en la unidad (o medias) que han sido más usados que otros a través de la historia. Las medias más populares como instrumento de proporcionalidad en arte y diseño eran ya conocidas desde la antigua Grecia y no han cambiado mucho desde sus orígenes, los pitagóricos distinguían tres tipos de media, que a continuación repasaremos brevemente.

## La media aritmética

La media aritmética es aquella en la que el intervalo entre el término mayor y el medio es el mismo que el existente entre éste último y el menor. De este modo, la media aritmética es la mitad de la suma entre las dos medidas iniciales.

Digamos, por ejemplo, que tenemos los números 100 y 50, la media aritmética vendría a ser 75, pues $100 + 50 = 150$ y su mitad es 75.

Matemáticamente se puede definir que entre $a$ y $b$, la media aritmética $m$ será igual a:

$$m = \frac{a + b}{2}$$

Como se ve, es la más común de las medias, conocida como promedio.

## Progresión aritmética

Llamamos *progresiones* a una sucesión de números que mantienen cierta relación entre ellos. De este modo, entre el primer número y el segundo existe la misma relación que entre el segundo y el tercero, la misma que entre el tercero y el cuarto y así sucesivamente.

Como con las medias, existen análogamente tres tipos de progresiones. En nuestro caso, una sucesión de números en la que cada término, excepto el primero, se obtiene sumando al anterior otro número constante; da como resultado una progresión aritmética. Esta constante fija que se suma se le llama *diferencia*.

Es fácil demostrar que el término general es:

$$A_n = A_1 + d(A_{n-1})$$

Donde los términos $A$ son los términos de la sucesión, los subíndices $n$ representan la posición del término en la sucesión y el factor $d$ es la constante llamada diferencia.

Usando esta fórmula y partiendo de 1 como primer elemento podemos generar diferentes progresiones aritméticas dependiendo de las constantes $d$ que usemos, por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} d=1 & 1:2:3:4:5:6:7\ldots \\ d=3 & 1:4:7:10:13:16:19\ldots \\ d=5 & 1:6:11:16:21:26:31\ldots \end{array}$$

Se puede decir también que en una progresión aritmética la suma de $n$ términos es:

$$S=\frac{(A_1+A_n)n}{2}$$

En términos de diseño, estas sucesiones matemáticas se usan generalmente para definir las dimensiones de la obra. De este modo un edificio podría tener un ancho de 13 metros, una altura de 16 y un largo de 19 si usara como sistema proporcional una progresión aritmética con diferencia $d = 3$. Este es exactamente el sistema usado por Andrea Palladio (1508-80) en su libro: "*I quattro libri della Architettura*" en el renacimiento tardío, [41].

Quizá el primer instrumento para diseñar con proporciones aritméticas fue la Cuerda Sagrada (Sacred Cord), usada como herramienta de diseño y construcción en todos los imperios egipcios.

"The origin of the historic building layout was the setting out of the 3:4:5 triangle with the Egyptian rope, wound about three pegs so that it formed three sides measuring three, four and five units, which provides a 90° angle between its 3 and 4 sides" [34], véase figura A.12-a.

Con esta simple herramienta era posible trazar en forma bastante exacta varias figuras básicas de la cultura material egipcia. Como se muestra en la figura A.12-b, la cuerda no solo ayuda a determinar el ángulo recto, sino que con ella se pueden trazar triángulos de relación altura:base $4:3$, $8:5$ y hasta círculos. Es de notar el hecho de que el largo entre dos nudos de la cuerda era de un *cubit* egipcio, alrededor de 0.5236 metros.

Otro aspecto interesante en la cuerda egipcia es que en su forma de triángulo rectángulo ejemplifica el modo más claro de representar el

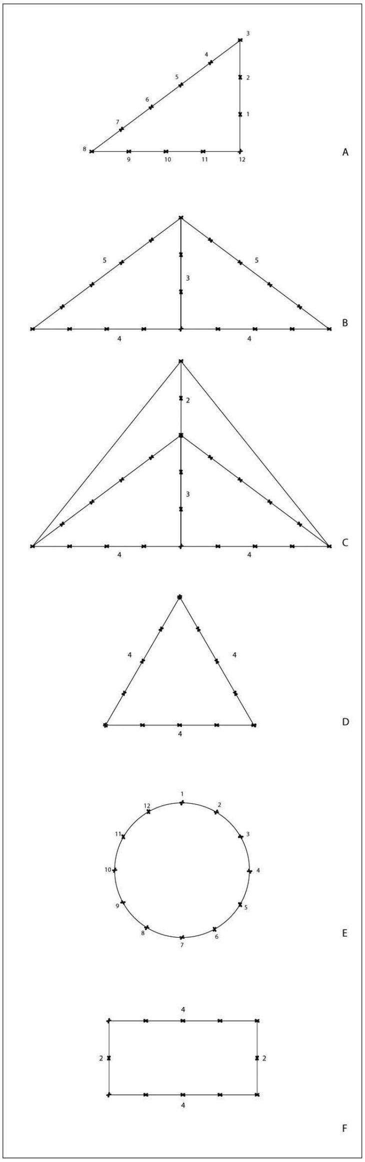


Figura A.12: Construcciones básicas de la cuerda egipcia.

teorema de Pitágoras. Pues como se muestra en la figura A.13, la suma de los cuadrados de los catetos alcanzan evidentemente los cuadrados de la hipotenusa. Al respecto Gadalla nos reporta "It must be noted that the Rhind Papyrus[6] shows that calculation of the slope of the pyramid [Rhind Nos. 56-60] employs the principles of a quadrangle triangle, which is called the Pythagoras Theorem." [34, page 64].

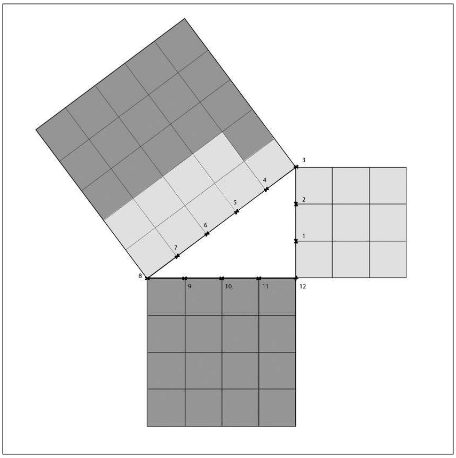


Figura A.13: El teorema de Pitágoras a partir de la cuerda egipcia.

Además Plutarco (Plutarch) en su Moralia, Vol IV también se refiere a esta relación: "The Egyptians hold in high honor the most beautiful of the triangles, since they like the nature of the Universe most closely to it, as Plato in the Republic seems to have made use of it in formulating his figure of marriage. This triangle has its upright of three units, its base of four and its hypotenuse of five, whose power to that of the other two sides." [34, page 88].

[6]The Rhind Mathematical Papyrus (now in the British Museum) is a copy of an older document during King Nemara (1849-1801 BCE), 12th Dynasty. It contains a number of examples to which academic Egyptologidtd have given the serial number 1-84.

Otra forma indiscutiblemente utilizada sería el rectángulo 5:8, salido también del uso de la cuerda egipcia (figura A.12). Este rectángulo tiene una relación de 0.625 y era conocido como proporción *Neb*, esta relación es interesantemente cercana a la relación que hoy conocemos como $\phi$ (phi) 0.618... también conocida como la *proporción áurea*. Lo que además coincide con el hecho de que la palabra Neb significa "oro o divinidad" en el antiguo Egipto. O sea que al menos los albores de los sistemas de proporción más conocidos estaban ya en gestión en estos sistemas constructivos egipcios.

Lo mismo se puede decir del doble cuadrado o $\sqrt{4}$ (figura A.12-f). Significativas construcciones desde el Zoser Complex (2630-2611 BCE) en Saqqara hasta el Festival Hall en el templo de Karnak, en el Nuevo Imperio, usan esta proporción obvia.

"An interesting observation regarding the rectangles is found on the pylon at the Temple of Khonsu, at Karnak. This pylon shows the falcon, vulture, and ibis[7], each on a different proportioned rectangle" [34, page 98], véase figura A.14.

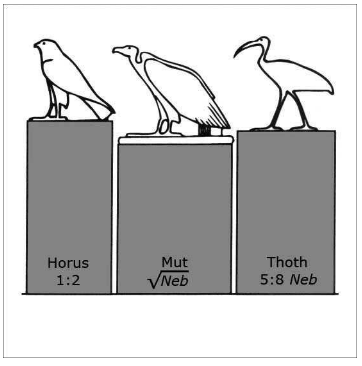


Figura A.14: Proporciones usadas como pedestales ceremoniales para tres dioses egipcios.

[7] Ave zancuda de pico largo y curvado hacia abajo y plumaje blanco y negro.

## La media geométrica

La media geométrica se puede definir como el corte de la unidad en el cual la relación entre el término mayor y el del medio es la misma que hay entre el del medio y el menor, es decir, se tiene que:

$$A : B = B : C$$

Volviendo a nuestro ejemplo, si tenemos los dos números 100 y 50, obtendríamos que unos 70.71 es la media geométrica entre ellos pues:

$$50/70.71 = 0.7071\ldots, \qquad \text{y además } 70.71/100 = 0.7071\ldots$$

Matemáticamente se define la media geométrica $m$ entre $a$ y $b$ como:

$$m = \sqrt{a \cdot b}$$

en nuestro ejemplo tenemos $m = \sqrt{50 \cdot 100} = \sqrt{5000} = 70.71\ldots$

## Progresiones geométricas

Como en el caso anterior, también es posible construir una progresión geométrica de números.

En este caso específico cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante. Esta constante fija se llama *factor*. En términos generales se puede decir que:

$$A_n = r(A_{n-1})$$

Donde los términos $A$ son los términos de la sucesión, los subíndices $n$ representan la posición del término en la sucesión y el factor $r$ es la constante llamada factor.

Usando esta fórmula y partiendo de 1, como primer elemento, podemos generar diferentes progresiones geométricas dependiendo de las constantes $r$ que usemos, por ejemplo:

$$r = 2 \qquad 1 :: 4 :: 8 :: 16 :: 32 :: 64 :: 128 \ldots$$
$$r = 3 \qquad 1 :: 3 :: 9 :: 27 :: 81 :: 243 :: 729 \ldots$$
$$r = 5 \qquad 1 :: 5 :: 25 :: 125 :: 625 :: 3125 \ldots$$

Este tipo de progresión ha sido usada exhaustivamente en la historia de occidente, con algunas variaciones famosas. Por ejemplo en el Renacimiento ya se hablaba de la combinación cruzada de dos secuencias geométricas para aumentar el abanico de posibilidades.

Es posible construir una tabla de progresiones donde el eje $X$ sea un tipo de progresión y el eje $Y$ otro, considérese por ejemplo:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 9 | 27 | 81 |
| 2 | 6 | 18 | 54 | 162 |
| 4 | 12 | 36 | 108 | 324 |
| 8 | 24 | 72 | 216 | 648 |
| 16 | 48 | 144 | 432 | 1296 |
| 32 | 96 | 288 | 864 | 2592 |

donde la razón de crecimiento horizontal es 3 y la vertical es 2.

Con esta técnica se amplía enormemente el rango de posibilidades del sistema proporcional ofreciendo al diseñador o artista una mayor gama de posibilidades.

Pero existen aun algunos detalles por resolver, uno de los problemas más generalizados en materia de proporciones es la división de la unidad, pues como hemos visto, la mayoría de ellos empiezan con 1. Así que para proporcionar espacios entre 0 y 1 no hay términos en las progresiones. Una de las soluciones usadas aplicando progresiones geométrica es dividir la unidad en razones cuyo denominador sea una progresión geométrica. De esta forma se crea una progresión al interno del ámbito $[0, 1]$, por ejemplo: $1/2 :: 1/4 :: 1/8 :: 1/16 :: 1/32 \ldots$

## La media armónica

La tercera y última media importante en la historia de las proporciones es la media armónica, que corresponde al término medio entre dos otros términos que divide su deferencia en la misma proporción que tienen los dos términos entre ellos.

En términos matemáticos, la media armónica $H$ es:

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

En nuestro habitual ejemplo, si tenemos nuestros dos números 100 y 50, obtendríamos que:

$$H = 2 * 100 * 50/(100 + 50) = 10000/150 = 66.6666\ldots$$

Además se puede afirmar que a las medias aritmética y armónica están relacionadas entre sí. Pues la fórmula:

$$H = \frac{2ab}{a+b}$$

puede escribirse también como:

$$\frac{1}{H} = \frac{1/a + 1/b}{2}$$

es decir, la media aritmética de los inversos de $a$ y $b$.

## Progresiones armónicas

Una progresión armónica es una sucesión de números tales que sus recíprocos forman una progresión aritmética. En términos matemáticos, se puede decir que una sucesión armónica se ve como sigue:

$$H_1 = \frac{1}{A_1}, \quad H_2 = \frac{1}{A_1 + d}, \quad H_3 = \frac{1}{A_1 + 2d}, \quad \ldots \quad H_n = \frac{1}{A_1 + nd}$$

Donde los términos $H$ son los términos de la sucesión armónica, términos $A$ son los términos de la sucesión aritmética, los subíndices $n$ representan la posición del término en la sucesión y el factor $d$ es la constante llamada *diferencia* de la sucesión aritmética.

Así que cada progresión aritmética puede generar su correspondiente progresión armónica, como sigue:

$$\begin{array}{ll} d = 1 & 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 \ldots \\ & 1 : 1/2 : 1/3 : 1/4 : 1/5 : 1/6 : 1/7 \ldots \\ & \\ d = 3 & 1 : 4 : 7 : 10 : 13 : 16 : 19 \ldots \\ & 1 : 1/4 : 1/7 : 1/10 : 1/13 : 1/16 : 1/19 \ldots \\ & \\ d = 5 & 1 : 6 : 11 : 16 : 21 : 26 : 31 \ldots \\ & 1 : 1/6 : 1/11 : 1/16 : 1/21 : 1/26 : 1/31 \ldots \end{array}$$

## Progresiones armónicas-musicales

Se debe mencionar además, que a las medias aritmética y armónica se las llama también medias musicales.

La contribución de los pitagóricos a la música está estrechamente relacionada con la media armónica. Ellos demostraron que los intervalos entre notas musicales pueden ser representados mediante razones de números enteros.

Para ello utilizaron un instrumento musical de una sola cuerda, llamado *monocordio*. Éste poseía un puente móvil que al desplazarse producía, en ciertas posiciones, notas que, comparadas con la emitida por la cuerda entera, resultaban más armoniosas que otras.

El más básico de tales intervalos es la octava. En el *monocordio*, la octava es el intervalo entre la nota emitida por la cuerda entera y la emitida por otra longitud igual a la mitad de la misma. Es decir, cuando la cuerda tiene longitud 1/2 de una determinada nota base, suena una octava más alta que la nota original. Si su longitud es 3/4 de la primitiva, la cuerda emite la cuarta de la nota base, y si su longitud es 2/3 de la inicial, la nota que suena es la quinta de la nota base [12, page 22], véase figura A.15.

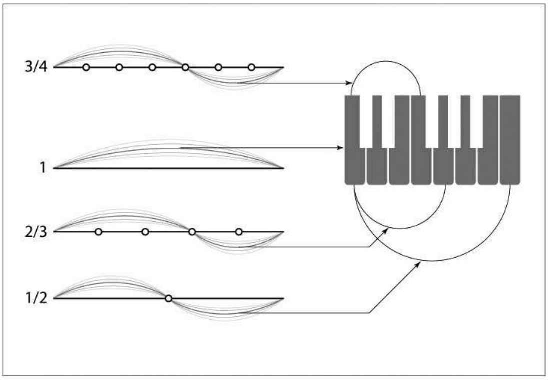


Figura A.15: Correspondencias entre las notas del monocordio y la escala musical occidental.

De este modo, partiendo de una nota base DO se tiene el siguiente esquema: DO(base) RE MI FA(cuarta) SOL(quinta) LA SI DO.

Por ofrecer esta relación entre la división de la cuerda en proporciones iguales y su correspondiente aumento en la nota emitida es que a las medias armónicas y aritméticas se les ha denominado medias musicales.

## Sucesión Fibonacci y progresión $\Phi$

Leonardo de Pisa (1170-1240), mejor conocido como Leonardo Fibonacci por su padre Bonacci (Fibonacci significa *figlio de Bonacci*, o sea, hijo de Bonacci) introdujo, en su obra más conocida (el *Liber Abaci*, 1202), la sucesión que lleva su nombre.

La sucesión de Fibonacci, está dada por: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., donde cada término de la sucesión es la suma de los dos anteriores. En términos matemáticos tendríamos:

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \text{ ó } n = 2 \\ x_{n-2} + x_{n-1} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Es la histórica solución dada por Leonardo de Pisa al problema de los conejos:

"A pair of adult rabbits produces a pair of baby rabbits once each month. Each pair of baby rabbits requires one month to grow to be adults and subsequently produces one pair of baby rabbits each month thereafter. Determine the number of pair of adults and baby rabbits alter some number of months. It is also assumed that rabbits are immortal." [13, page 35].

El problema, sin embargo, no se quedó en materia de conejos. "The reason that Fibonacci's name is so famous today is that the appearance of the Fibonacci sequence is far from being confined to the breeding of rabbits We shall encounter the Fibonacci sequence in an incredible variety of seemingly unrelated phenomena.", [30, page 98].

Para iniciar nuestro propio análisis comencemos viendo como se comporta la sucesión de Fibonacci con respecto a las proporciones entre sus elementos.

En la tabla A.3 se calculan los primeros 25 números de la serie Fibonacci, en la primera columna tenemos la posición del número dentro de la serie, en la segunda columna está la sucesión Fibonacci y en la tercera columna se calcula la proporción entre el número anterior y el número en ese renglón.

Esta columna de la izquierda se grafica en la figura A.16, donde se observa la función que define el comportamiento de las proporciones entre dos elementos sucesivos de la progresión Fibonacci.

Este gráfico es importante pues nos muestra cómo en la sucesión de

| posición | fibonacci | proporción $F_n/F_{n-1}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | |
| 2 | 1 | 1 |
| 3 | 2 | 1.5 |
| 4 | 3 | 1.666666667 |
| 5 | 5 | 1.6 |
| 6 | 8 | 1.625 |
| 7 | 13 | 1.615384615 |
| 8 | 21 | 1.619047619 |
| 9 | 34 | 1.617647059 |
| 10 | 55 | 1.618181818 |
| 11 | 89 | 1.617977528 |
| 12 | 144 | 1.618055556 |
| 13 | 233 | 1.618025751 |
| 14 | 377 | 1.618037135 |
| 15 | 610 | 1.618032787 |
| 16 | 987 | 1.618034448 |
| 17 | 1597 | 1.618033813 |
| 18 | 2584 | 1.618034056 |
| 19 | 4181 | 1.618033963 |
| 20 | 6765 | 1.618033999 |
| 21 | 10946 | 1.618033985 |
| 22 | 17711 | 1.61803399 |
| 23 | 28657 | 1.618033988 |
| 24 | 46368 | 1.618033989 |
| 25 | 75025 | 1.618033989 |

Tabla A.3: Primeros 25 números de Fibonacci.

Fibonacci las relaciones entre números consecutivos tienden rápidamente a una razón específica.

Después de un abrupto tropiezo en los primeros seis o siete números las proporciones entre ellos se acercan claramente a una razón aproximada de 1.618033989. De este modo, ya en la posición 28 de la sucesión, la razón estudiada es extremadamente cercana a 1.6180339887... ó $\Phi$.

"It is interesting to look at relationships between various Fibonacci numbers. Specifically the ratio of successive Fibonacci numbers is an interesting quantity...It seen that as $n$ increases then the ratio $F_n/F_{n-1}$ approaches the golden ratio. Figure 5.5 (likely our Figure A.16) shows

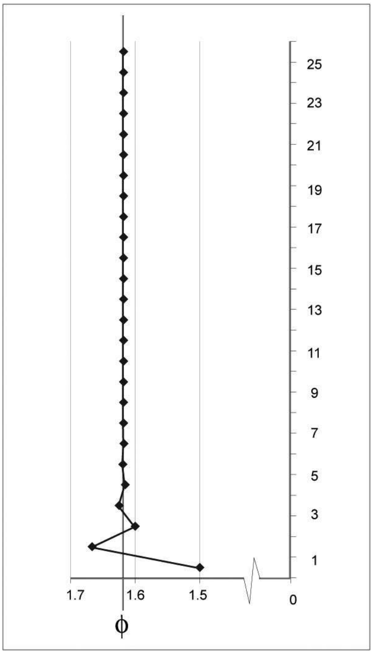


Figura A.16: Gráfico del cociente de números de Fibonacci sucesivos.

that this ratio oscillates around the value of $\tau$ (our $\Phi$) as a function of $n$ and asymptotically approaches this value. This may be expressed as

$$\lim_{n \to +\infty} F_n / F_{n-1} = \tau$$

and is a fundamental property of the Fibonacci sequence and the golden ratio" [13, page 43].

Se podría decir entonces que a partir de un cierto número (dependiendo de nuestra tolerancia con los decimales) la sucesión de Fibonacci se convierte en una progresión geométrica en la que el factor $f$ es $\Phi$.

Este factor $\Phi$, conocido como uno de los cuatro irracionales de Euclides, es en realidad: $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ aproximadamente 1.6180339887. Este valor fue introducido como una de los descubrimientos griegos especialmente usado en el cálculo del pentágono (base del dodecaedro) y de la construcción cumbre de los *Elements* de Euclides [18], véase figura A.17.

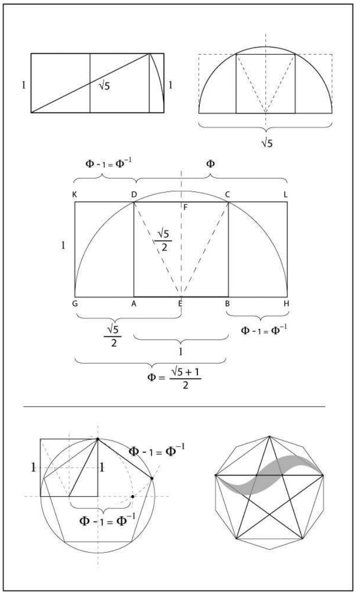


Figura A.17: Construcción sobre los rectángulos áureos y las relaciones en el pentágono ya definidas en los Elements de Euclides.

Además este mismo valor es usado a menudo como base para desarrollar otras importantes construcciones en materia de proporciones, como en el caso de la espiral logarítmica.

"we note that $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618$ and $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618$, where $\sqrt{5} = 2.236$, an important factor in the wave Principle and the logarithmic spiral" [11, page 3].

Además de lo visto anteriormente en esta construcción euclidiana, este factor tiene una característica más que merece ser anotada.

Solucionando el dilema planteado en el tema de las proporciones entre las medianas y la unidad; $\Phi$ es el único factor en el que se puede dividir la unidad y que las proporciones de las tres partes en secuencia sean la misma, es decir, si partimos la unidad en un corte igual a $\Phi$, la parte $A$ será a la parte $B$ como la parte $B$ es a la parte $C$ (el todo), véase figura A.11.

O sea, que si ponemos en sucesión las tres partes $A :: B :: C$, obtenemos una progresión geométrica en donde el factor es $f = \Phi$.

Esto es un hecho relevante si pensamos que todos los esfuerzos por proporcionar una obra artística podrían perderse si al proporcionar una parte el resultado no es proporcional al todo.

Algunos autores hacen diferencia entre la proporción del (A.3) menor y el medio y (A.4) el medio y el menor, esto es entre $A : B$ y $B : A$.

En la sucesión Fibonacci sería como decir que observemos la proporción hacia delante o hacia atrás. Hacia delante sería como pensar ¿qué número debo multiplicar para obtener el siguiente valor en la serie?, el número sería $\Phi$ (en mayúscula) unos $1.6180\ldots$, el otro punto de vista es ¿qué factor debo multiplicar hacia atrás?, o sea, teniendo un número de la progresión ¿qué factor debo multiplicar para obtener el número anterior de la progresión?. Este factor sería $\phi$ (en minúscula) unos $0.6180\ldots$

Debido a estas características tan propias de esta proporción, el factor $\Phi$ y $\phi$ están relacionados íntimamente, por ejemplo el recíproco de $\Phi$ es $\phi$, o sea,

$$\frac{1}{\Phi} = \phi$$

por supuesto, además se cumple que $\Phi - 1 = \phi$.

En la parte superior de la figura A.18 vemos esta relación en forma geométrica. Como vemos un cuadrado al que se le abate la media diagonal (esto es la diagonal de la mitad del cuadrado) genera el *rectángulo áureo*, o sea, un rectángulo que tiene como altura 1 y como base $\Phi$. Este

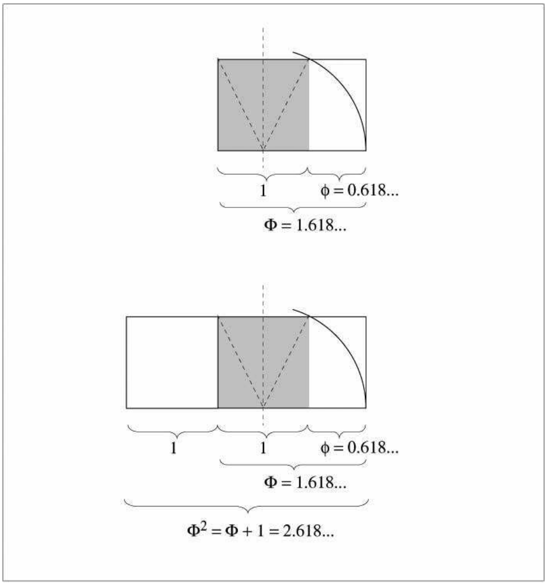


Figura A.18: Construcción clásica del rectángulo áureo y su relación con el cuadrado de Φ.

diagrama enseña gráficamente, con claridad, cómo la unidad se añade a $\phi$ (0.618 . . . ) para juntos sumar Φ (1.618 . . . ).

En esta misma figura abajo se ve como a la misma construcción se le añade otro cuadrado. En este caso el rectángulo resultante tiene una proporción de $\Phi^2$ o lo que es lo mismo

$$\Phi + 1 = 2.6180\ldots$$

más aun, como T. Cook (1914-1979) escribe:

"The most significant fact, for our purpose, about the Φ series is that it gives a double Fibonacci series, and in the Φ series the ratio of any two successive number is not merely approximate but exact, for the constant ratio is $\Phi = 1.618034$. The double Fibonacci series in Φ is exhibited thus:

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &= 1+\Phi \\
\Phi^3 &= 1+2\Phi \\
\Phi^4 &= 2+3\Phi \\
\Phi^5 &= 3+5\Phi \\
\Phi^6 &= 5+8\Phi
\end{aligned}$$

and so on.” en su clásico libro “The curve of life” [8, page 420].

Esta característica inherente a las progresiones de Fibonacci permitió que algunos teóricos, como Le Corbusier en el siglo XX, tomaran dos o más escalas de números en este tipo específico de progresión y las entrelazaran para lograr una mayor paleta de posibilidades para diseñar.

Otro problema práctico que enfrentó Corbusier y muchos autores antes que él, fue la necesidad de usar números enteros en lugar de irracionales. Esto debido a la obvia necesidad del diseño de la vida real de tener que medir espacios físicos y dimensiones reales. Las proporciones puras como los cuatro irracionales euclidianos y $\phi$ son en realidad inmedibles (nunca son exactos pues sus decimales son infinitos). Las sucesiones Fibonacci, en cambio, representan una maravillosa alternativa al dilema, pues al ser series aditivas siempre generan números enteros.

“Whole-number additive progressions such as the Fibonacci series are at least as significant manifestations of the golden section and others theoretically incommensurable ratios as are the irrational limits towards which these progressions converge. And in architecture, just as in nature, whole numbers reflect the reality of building. Even when a building is not constructed of individuals unit like bricks, it is still necessary to measure it out in units: inches or centimeters...

In other words, in order to be architectonically expressive, number must be experienced in a very concrete way. It must be something like counting pebbles on a beach The word *calculate* derives, incidentally, from Latin *calculus*, meaning a small stone” [40, pages 47-48].

## Espirales

Vale la pena mencionar ahora un tipo de construcción muy conocida en materia de proporciones: las espirales. Estas, generalmente, se producen a partir de las sucesiones que hemos estudiado, analicemos algunos ejemplos:

Un rectángulo áureo es aquel que tiene la base en proporción áurea con la altura. Este tipo de rectángulo tiene la propiedad de que se puede dividir en un cuadrado y un rectángulo, sin embargo, lo más importante de esta división es que el rectángulo resultante de ella (al lado del cuadrado) también es un rectángulo áureo, es decir, su proporción es igual a la proporción del rectángulo original, véase figura A.19.

Este nuevo rectángulo obtenido puede ser a su vez dividido en un cuadrado y un nuevo rectángulo áureo. Si repetimos este proceso indefinidamente y al mismo tiempo dibujamos arcos de un cuarto de circunferencia circunscritos en los cuadrados que vamos obteniendo, se genera una espiral áurea cuyo centro está en la intersección de las dos diagonales, véase figura A.19.

En realidad esta curva no es una espiral debido a que está formada por arcos de circunferencia y no por una forma continua, pero ilustra claramente el ritmo de crecimiento.

Del mismo modo se puede construir una espiral “seudo” logarítmica a partir de un triángulo isósceles de ángulos $36°$, $72°$, $72°$.

En este caso si la relación entre los lados iguales del triángulo isósceles y su base es $\Phi$ (en la figura $AB/BC = \Phi$), se dice entonces que es un triángulo áureo.

En la figura A.19, $ABC$ es uno de esos triángulos, si bisecamos el ángulo en $B$ obtenemos dos triángulos: $DAB$ y $BCD$. En $DAB$ se tiene que $AB/AD = \Phi$. El segundo de ellos es semejante al original y por tanto también es un triángulo áureo. Si en este triángulo bisecamos el ángulo en $C$, obtenemos $CDE$ que también es semejante a los dos

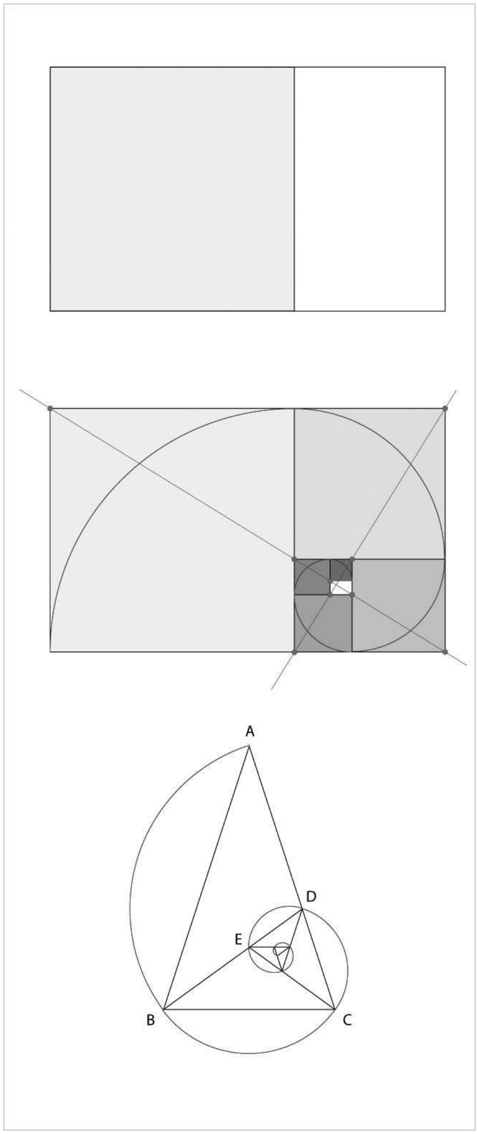


Figura A.19: Desarrollo de las espirales clásicas a partir de los rectángulos y triángulos áureos.

anteriores. Continuando este proceso se obtiene una sucesión espiral de *triángulos áureos* análogamente al proceso realizado con los rectángulos. Estas construcciones son semejantes a las construcciones *ad quadratum* y *ad triangulum* definidas en la antigua Grecia.

Se obtiene así una línea que describe una curva que es siempre similar a sí misma, en un factor de escala diferente. Es una aproximación discreta de una espiral logarítmica o equiangular.

En una verdadera espiral logarítmica o equiangular, la separación de éstas aumenta al crecer el ángulo, es decir, el radio vector crece de forma exponencial respecto del ángulo de giro. Por eso recibe un tercer nombre, espiral geométrica.

Su ecuación es de la forma:

$$r = C^{k\theta}$$

donde $r$ es el radio de posición, $C$ y $k$ constantes y $\theta$ el ángulo de giro.

En estas espirales además el ángulo es proporcional al logaritmo del radio, de ahí su nombre de espiral logarítmica.

## Números poligonales y sólidos

Existen otras progresiones importantes usadas en el diseño a través de la historia como instrumento de dimensionado. Los números poligonales son un buen ejemplo de éstas.

Fueron desarrollados por los pitagóricos. Como se dijo anteriormente, en aquella época los números se representaban mediante pequeñas piedras o cuentas (*calculus*) que se disponían en el suelo o en una mesa. Sería adecuado además decir que la palabra *número* solo se usaba para los números enteros y los racionales se llamaban razones (como 3/4).

Así que las "cuentas" se ponían sobre la mesa y se contaba. Es lógico suponer que el ordenamiento de las cuentas en la mesa era importante para el orden de los cálculos y para su eficiencia.

Con esta idea se descubrió que algunos números pueden disponerse formando figuras geométricas, por ejemplo 3 guijarros se pueden disponer formando un triángulo, 4 forman un cuadrado, 5 un pentágono, etc., véase figura A.20.

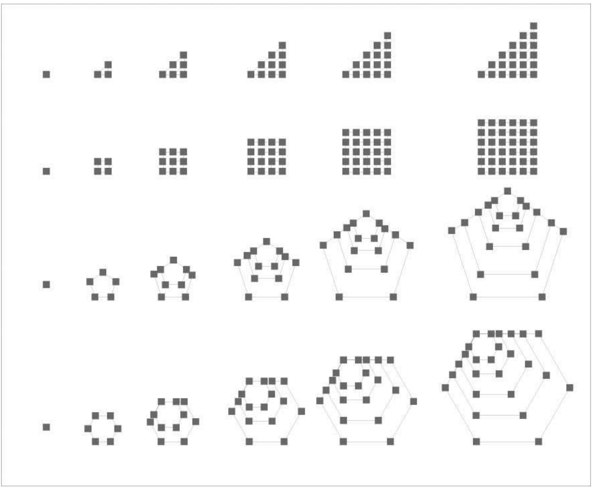

Figura A.20: Algunos números poligonales y su construcción clásica.

Aumentando proporcionalmente estas figuras se obtienen sucesiones de figuras formadas por guijarros que pueden simbolizar progresiones matemáticas. El resultado de este proceso son una serie de progresiones que llamamos números poligonales, algunos de ellos son:

Los números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15,. . . , son enteros del tipo

$$N = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Los números cuadrados: 1, 4, 9, 16, 25, . . . , son enteros del tipo

$$N = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$$

Los números pentagonales: 1, 5, 12, 22,. . . , son enteros del tipo

$$N = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2)$$

Los números hexagonales: 1, 6, 15, 28,. . . , son enteros del tipo

$$N = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3)$$

En general, los números poligonales son enteros del tipo:

$$n + \frac{n(n-1)b}{2}$$

Donde si $b = 1$ se dice que es un número triangular, si $b = 2$ cuadrados, si $b = 3$ pentagonales y así sucesivamente.

Observemos que si tomamos el primer número de cada serie de números poligonales $3, 4, 5, 6, \ldots$ obtenemos una progresión aritmética de diferencia 1. Si tomamos el segundo número de cada serie $6, 9, 12, 15, \ldots$ obtenemos una progresión aritmética de diferencia 3, y así sucesivamente es posible encontrar sucesiones aritméticas en las secuencias entrelazadas de los números poligonales.

Esta misma idea se puede extrapolar a los números sólidos y tener números tetraédricos, cúbicos, y así *ad infinitum*, véase figura A.21.

Estas progresiones numéricas iban muy de acuerdo con la idea de un universo formado por unidades indivisibles. Los pitagóricos creían en un principio en la existencia de un mundo basado en unidades discretas.

"The unit was conceived as having a dimension, however small: it was a discrete quantity, a smallest indivisible whole. It followed from this that combinations of units formed characteristic space-filling shapes, depending on their arrangement. They could form series of plane figures or solid forms: triangular, square, oblong, cubic, etc. Matter was believed to consist of combination of such shapes." [40, page 64].

Esta concepción fue superada en tiempos de los mismos pitagóricos con la entrada en escena de los irracionales, comenzando con $\sqrt{2}$, como diagonal del cuadrado. Sin embargo, las sucesiones fueron usadas como herramienta de diseño, y continúan siéndolo hoy, debido a su facilidad de ser aplicadas en el mundo real del diseño y la arquitectura. Del mismo

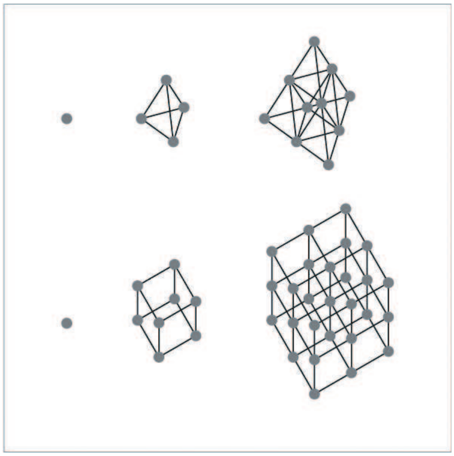

Figura A.21: Algunos números sólidos y su construcción clásica.

modo que en la serie de Fibonacci las progresiones poligonales o sólidas dan al diseñador números enteros con los que se puede medir a diferencia de los irracionales inmanejables.

Con los números poligonales terminamos el recuento de las herramientas matemáticas más usadas en la historia de nuestra cultura, como instrumentos proporcionales. Como se ha visto, si bien se ha desarrollado a través de los años una cantidad significativa de sistemas de medir o generar proporción en la cultura material, también es cierto que ningún sistema satisface del todo las expectativas básicas de diseño.